TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

A matriz transposta de uma matriz A é denotada A^T e é obtida trocando linhas por colunas.

Exemplos:

$$B = \begin{bmatrix} 27 & 4 \\ 0 & 2 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \text{, então } \quad B^T = \begin{bmatrix} 27 & 0 & 10 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \text{, então } \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

portanto:

aij = bji

TESTES

02. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}_{3 \text{ X } 4}$

então $\mathbf{A^t} =$

03. Uma matriz M é chamada matriz simétrica se $M^t = M$. Ache os valores de x, y e z para que a matriz abaixo seja simétrica.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ y & 5 & 3 \\ 7 & z & 6 \end{pmatrix}_{3 \text{ X } 3}$$

Observe que, para ser simétrica, M deve ser quadrada (isto é, de ordem n x n) e $a_{ij} = a_{ji}$.

MATRIZ IDENTIDADE (OU UNIDADE)

Observação: (chamaremos de Diagonal Principal o conjunto dos elementos a_{ij} de uma matriz quadrada, em que i = j, formam uma diagonal).
Matriz identidade, $I_{n \times n}$,é uma Matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1(um) e todos os outros elementos são 0(zero).

Ex:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \qquad I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

OPERAÇÕES COM MATRIZES

MULTIPLICAÇÃO POR NÚMERO REAL

Multiplica-se cada elemento da matriz pelo número.

Exemplo:

$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3 \\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

TESTES

04. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}_{3 \text{ X } 2}$

então 2.A:

05. A "oposta de uma matriz M" é representada por - M e definida por –M = -1. M . Calcule a oposta de:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}_{3 \text{ X } 2}$$

06. Uma matriz M é chamada antissimétrica se $M^t = -M$. Ache os valores de x, y e z para que a matriz abaixo seja antissimétrica.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x & 2 & y \\ z & 0 & 4 \\ z & -4 & x \end{pmatrix}_{3 \text{ X } 3}$$

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Condição: As matrizes a serem somadas têm que ter a mesma ordem.

Procedimento: Somam-se ou subtraem-se, os elementos de mesma posição.

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix}1&3&2\\1&0&0\\1&2&2\end{bmatrix}_{3\times3}+\begin{bmatrix}0&0&5\\7&5&0\\2&1&1\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}1+0&3+0&2+5\\1+7&0+5&0+0\\1+2&2+1&2+1\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}1&3&7\\8&5&0\\3&3&3\end{bmatrix}_{3\times3}$$

Exemplo 2:

$$\begin{pmatrix}2&-3\\4&0\end{pmatrix}_{2\times2}-\begin{pmatrix}2&-3\\4&0\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}_{2\times2}$$

TESTES

07. Calcule:

a) $\begin{pmatrix}1&2&0\\3&7&-2\end{pmatrix}_{2\,X\,3}-\begin{pmatrix}2&-1&5\\-2&2&-6\end{pmatrix}_{2\,X\,3}$

b) $\begin{pmatrix}2&3\\1&-8\end{pmatrix}_{2\,X\,2}-\begin{pmatrix}-10&4\\-5&-12\end{pmatrix}_{2\,X\,2}=$

08. Sendo A = $\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}_{2\,X\,2}$ e B = $\begin{pmatrix}-2&-6\\3&5\end{pmatrix}$

Encontre a matriz X tal que: $X-\dfrac{A-X}{2}=\dfrac{B+X}{3}$

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZ POR MATRIZ

Só é possível efetuar o produto A x B **(nesta ordem)**, de duas matrizes A e B, se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B. A matriz resultante terá o mesmo número de linhas que A e o mesmo número de colunas que B. Ou seja:

$$A_{p\times m}\times B_{m\times q}=C_{p\times q}$$

Cada elemento da matriz $C_{p\times q}$ é a soma dos produtos ordenados de uma linha da matriz A por uma coluna da matriz B.

Exemplo 1: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}_{2\times2}\times\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}_{2\times2}=$

$$\begin{pmatrix}1\times1+2\times3&1\times2+2\times4\\3\times1+4\times3&3\times2+4\times4\end{pmatrix}_{2\times2}=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}_{2\times2}$$

Exemplo 2 : $\begin{bmatrix}2&1\\-3&4\\0&5\end{bmatrix}x\begin{bmatrix}7&1&3\\-1&0&6\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}2.(7)+1.(-1)&2.(1)+1.(0)&2.(3)+1.(6)\\-3.(7)+4.(-1)&-3.(1)+4.(0)&-3.(3)+4.(6)\\0.(7)+5.(-1)&0.(1)+5.(0)&0.(3)+5.(6)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}13&2&12\\-25&-3&15\\-5&0&30\end{bmatrix}$$

TESTES

09. Complete:

a) $A_{5\times1}$ x $B_{\_x\_}$ = $C_{\_x3}$

b) $A_{\_x\_}$ x $B_{4\times2}$ = $C_{3\times\_}$

10. A matriz nula é aquela cujos elementos são todos iguais a zero. Observe como o produto de duas matrizes não-nulas pode resultar na matriz nula.

$$\begin{pmatrix}-3&1\\3&-1\end{pmatrix}_{2\,X\,2}\times\begin{pmatrix}2&1\\6&3\end{pmatrix}_{2\,X\,2}$$

Observação:
Comutativo é quando A .B = B . A
Às vezes, A e B, podem comutar. Neste caso, dizemos que as matrizes A e B são comutativas.